Μαθημα 21ο 18/5/2017

Τοπολογια

π.χ. $(0,1)\cup(1,2)=D$

$\{(0,1),(1,2)\}$ ανοιχτη διαμεριση του D

$(\mathbb{Z},|\cdot|)$ συνεκτικος

$a\in\mathbb{Z}$, $\{a\}\subseteq\mathbb{Z}$ ανοιχτο $\Leftrightarrow \{a\}=G\cap\mathbb{Z}$

$\downarrow$ ανοιχτο στο $\mathbb{R}$

$G=(a-1/2,\ a+1/2)$ ανοιχτο στο $\mathbb{R} \Rightarrow G\cap\mathbb{Z}=\{a\}$ ανοιχτο στο $(\mathbb{Z},|\cdot|)$

$(-3,4)\cap\mathbb{Z}=\{-2,-1,\dots,3\}$

$\left.\begin{array}{l}\mathbb{Z}=\{a\}:\ \text{ανοιχτο, κλειστο (στο } \mathbb{Z})\\ \mathbb{Z}=\{a\}\cup(\mathbb{Z}\setminus\{a\})\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{Z}$ συνεκτικος

$\underbrace{[\mathbb{Z}\cap(-\infty,1/2)]\cup[\mathbb{Z}\cap(1/2,+\infty)]}_{\text{ανοιχτα στο } \mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$

⊛ η ενωση υποσυνολων δινει ολα τα συνολα

$\left.\begin{array}{l}\forall A\subseteq\mathbb{Z} \quad A=\bigcup_{a\in A}\{a\}\\ \{a\}\ \text{ανοιχτο στο } \mathbb{Z}\end{array}\right\} \Rightarrow A$ ανοιχτο στο $\mathbb{Z}$

$A\subseteq\mathbb{Z}$ κλειστο

$\mathbb{Z}-A$ ανοιχτο στο $\mathbb{Z}$

Παρατηρηση

$(\mathbb{Q},|\cdot|)$ συνεκτικος υποχωρος του $(\mathbb{R},|\cdot|)$?

$\mathbb{Q}$ συνεκτικο $\subseteq\mathbb{R}$?

Συμπερασμα: $\mathbb{Q}$ οχι συνεκτικος

$a\in\mathbb{Q}$, $A=\{a\}\subseteq\mathbb{Q}$, A κλειστο στο $\mathbb{Q}$

A ανοιχτο στο $\mathbb{Q}$?

Αν A ανοιχτό στο $\mathbb{Q}$ τότε $A = \{a\} = G \cap \mathbb{Q}$ ανοιχτό στο $\mathbb{R}$

$a \in G \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset G \Rightarrow$

$\{a\} \subseteq \mathbb{Q} \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq \underbrace{G \cap \mathbb{Q}}_{=\{a\}}$

$\Rightarrow \{a\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ δεν ισχύει λόγω πυκνότητας

$\Rightarrow$ Άτοπο

Επομένως το A δεν είναι ανοιχτό

Άσκηση

$y = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\underbrace{(-\infty, \sqrt{2})}_{\text{ανοιχτό στο } \mathbb{R}} \cap \mathbb{Q} \to$ ανοιχτό $\quad (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ → ανοιχτό στο $\mathbb{Q}$

$= \underbrace{\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}}_{A} \cup \underbrace{\{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}}_{B} = \mathbb{Q}$

$\{A, B\}$ ανοιχτή διαμέριση του $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ όχι συνεκτικό

Ορισμός

(E, ρ) μ.χ, $\emptyset \neq S \subseteq E$ θα λέγεται συνεκτικό υποσύνολο του E

$\Leftrightarrow (S, \rho_S)$ συνεκτικός $\Leftrightarrow \nexists \{A, B\}$ ανοιχτή διαμέριση του (S, ρ_S)

Κριτήριο

(E, ρ) μ.χ, $\emptyset \neq S \subseteq E$. Τ.Α.Ε.Ι

1) S συνεκτικός $\subseteq E$

2) $\nexists \{A, B\}$ ανοιχτό κάλυμμα στο E, του S ώστε $A \cap S \neq \emptyset$, $B \cap S \neq \emptyset$ και $(A \cap B) \cap S = \emptyset$

Απόδειξη

(1) ⇒ (2) Έστω ότι δεν ισχύει το (2)

⇒ Συμβαίνει η συνθήκη (Σ) για κάποιο $\{A, B\}$

B, A ανοιχτό στο $E \Rightarrow \{A \cap S, B \cap S\}$, $(A \cap S) \cap (B \cap S) = (A \cap B) \cap S = \emptyset$

$(A \cap S) \cup (B \cap S) = S \quad (A \cup B \supseteq S)$

(2) ⇒ (1) Ισχύει η (2) ΝΔΟ (S, ρ_S) συνεκτικός

Έστω ότι ο (S, ρ_S) όχι συνεκτικός

$\Leftrightarrow \exists \{A, B\}$ διαμέριση ανοιχτή στο S

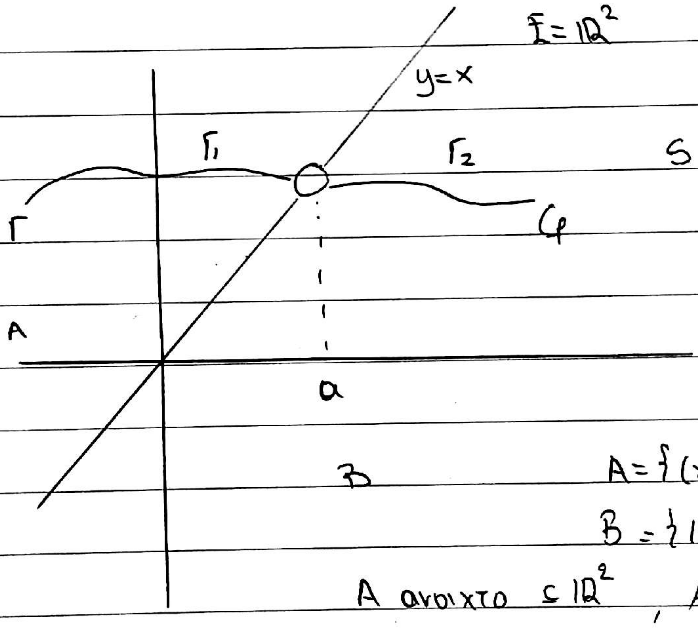
B, A ανοιχτά στο S
$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
$A \cup B = S$, $A, B \subseteq S$
$A \cap B = \emptyset$

A ανοιχτό στο $S \Rightarrow \exists A_1$ ανοιχτό στο E, $A = A_1 \cap S$, B ανοιχτό στο $S \Rightarrow \exists B_1$ ανοιχτό στο E, $B = B_1 \cap S$, άρα $\{A_1, B_1\}$ αποτελείται από ανοιχτά στο E σύνολα

$A_1 \cap S = A \neq \emptyset$
$B_1 \cap S = B \neq \emptyset$
$A_1 \cup B_1 \supseteq S$

$E = \mathbb{R}^2$

Π.χ



$S = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^2$

Γ συνεκτικό $\subseteq \mathbb{R}^2$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$

A ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^2$, $A \cup B \not\supseteq \Gamma$

$\Gamma_1 = A \cap \Gamma \neq \emptyset$
$\Gamma_2 = B \cap \Gamma \neq \emptyset$
$(A \cap B) \cap \Gamma = \emptyset$

⊛ Το γράφημα μιας συνεχής συνάρτησης είναι συνεκτικό

Πρόταση

Έστω $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$

Το A είναι συνεκτικό $\Leftrightarrow$ A διάστημα

(A διάστημα: (ορσ) $\forall\, a, b \in A$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$ με $a < c < b \Rightarrow c \in A$)

Αποδειξη

(⇒) Εστω οτι το A ειναι συνεκτικο. Θδο ειναι διαστημα

Εστω οτι δεν ειναι διαστημα $\Rightarrow \exists\, a, b \in A$, $\exists\, a < c < b$

$a < b$ $\qquad c \notin A$

Θεωρουμε $A_1 = (-\infty, c)$ ανοιχτο $\subseteq \mathbb{R}$

$B_1 = (c, +\infty)$

$\{x \in A : x < c\} = A \cap A_1$

$\{x \in A : x > c\} = A \cap B_1$

$\{A \cap A_1, A \cap B_1\}$ ανοιχτη διαμεριση στο A ατοπο

Αρα το A δεν μπορει να ειναι συνεκτικο

Εφαρμογη / Θεωρια

Δινεται ενας μ.χ (E, ρ) και $\phi \neq S \subseteq E$, S συνεκτικο $\subseteq E$

και $\{A, B\}$ ανοιχτη διαμεριση του E $\Rightarrow S \subseteq A$ ή $S \subseteq B$

Αποδειξη

(Με ατοπο)

Εστω οτι $S \not\subseteq A$ τοτε και $S \not\subseteq B$ ($\exists\, a \in S$, $a \notin B \Rightarrow a \in A$)

$\Rightarrow S \cap A \neq \phi$ παρομοια $S \cap B \neq \phi$

$\Rightarrow \{S \cap A, S \cap B\}$ (1)

$\subseteq S \qquad \subseteq S$ (ανοιχτα στο S)

$(A \cap S) \cup (B \cap S) = (A \cup B) \cap S = E \cap S = S$

$(A \cap S) \cap (B \cap S) = (A \cap B) \cap S = \phi \cap S = \phi$

$\Rightarrow$ (1) ανοιχτη διαμεριση του S, S οχι συνεκτικο $\Rightarrow$ Ατοπο

Προταση

$f : (E_1, \rho_1) \xrightarrow{\text{επι}} (E_2, \rho_2)$ συνεχης

(E_1, ρ_1) συνεκτικο $\Big\}$ $\Rightarrow$ (E_2, ρ_2) συνεκτικο

$(f(E_1) = E_2)$

Αποδειξη

Εστω οτι ο E_2 δεν ειναι συνεκτικος $\Rightarrow \exists\, y \subsetneq E_2$

$y \neq \emptyset$, y ταυτοχρονα ανοιχτο και κλειστο

Εχουμε $x = f^{-1}(y)$ επειδη f συνεχης $\Rightarrow x$ ανοιχτο και κλειστο στο E_1

$x \neq \emptyset$ και $x \subsetneq E_1$ (αν $x = E_1$ τοτε $f^{-1}(y) = x = E_1$

$x_1 \notin f^{-1}(y) = x$ διοτι $f(x_1) = y_1 \notin y$